נושאים במתמטיקה

פרק 10 - מרחבים וקטורים

תוכן העניינים

מרחבים ותת-מרחבים

סימון

R^n - המרחב הווקטורי של כל הווקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R.

$M_n\left[R\right]$ - המרחב הווקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R.

$P_n\left[R\right]$ - המרחב הווקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R.

$F\left[R\right]$ - המרחב הווקטורי של כל הפונקציות הממשיות $\left(f:R\to R\right)$ מעל השדה R.

שאלות

בשאלות **1-7** בדקו האם W תת-מרחב של R^3:

1) $W=\{(a,b,c)\,|\,a+b+c=0\}$

2) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c\}$

3) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=3b\}$

4) $W=\{(a,b,c)\,|\,a<b<c\}$

5) $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c^2\}$

6) $W=\{(a,b,c)\,|\,c-b=b-a\}$
כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

7) $W=\{(a,b,c)\,|\,b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$
כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

בשאלות **15-8** בדקו האם W תת-מרחב של $M_n[R]$:

8) W מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W=\{A|\ A=A^T\}$.

9) W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B.
כלומר, $W=\{A|\ AB=BA\}$.

10) W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס.
כלומר, $W=\{A|\ |A|=0\}$.

11) W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W=\{A|\ A^2=A\}$.

12) W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

13) W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס.
כלומר, $W=\{A|\ AB=0\}$.

14) W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A|\ tr(A)=0\}$.

15) W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

בשאלות **21-16** בדקו האם W הוא תת-מרחב של $P_n[R]$:

16) W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W=\{p(x)|\ p(4)=0\}$.

17) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

18) W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה $4\geq$.
כלומר, $W=\{p(x)|\deg(p)\leq 4\}$.

19) W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x.

20) W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n, כאשר $4\leq n\leq 7$.

21) $W=\{p(x)|\ p(0)=1\}$

בשאלות **30-22** בדקו האם W הוא תת-מרחב של $F[R]$:

22) W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.
כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\mid f(-x)=f(x)\}$.

23) W מורכב מכל הפונקציות החסומות.
כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\mid |f(x)|\le M\}$.

24) W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

25) W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

26) W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

27) $W=\left\{f(x)\mid \int_0^1 f(x)dx=4\right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב- $[0,1]$).

28) $W=\{f(x)\mid f'(x)=0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

29) $W=\{f(x)\mid f'(x)=1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

30) $W=\{f(x)\mid f(x)=f(x+1)\}$

31) בדקו האם $W=\{(z_1,z_2,z_3)\mid z_2=\bar{z}_1, z_3=z_1+\bar{z}_1\}$ הוא תת-מרחב של C^3 :
א. מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.
ב. מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

32) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&1&-1\\1&-1&1&-1&-1\\1&3&-1&1&1\end{pmatrix}$.
א. מצאו וקטור b, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון.
ב. מהי קבוצת כל הווקטורים b, כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון?
ג. האם הקבוצה מסעיף ב' מהווה תת-מרחב של R^5 ?

33) יהי V מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4, מעל שדה F.

א. מצאו תנאי על k, עבורו הקבוצה $W=\{p\in V \mid p(0)=p(1)=p(2)=k\}$, הינה תת-מרחב של V.

ב. מצאו קבוצה סופית של פולינומים מ- V, שפורשים את W.

הערה: לפתרון סעיף זה עברו קודם על הנושא 'בסיס ומימד למרחב הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית'.

תשובות סופיות

1)	כן	**2)**	כן	**3)**	כן	**4)**	לא	**5)**	לא
6)	כן	**7)**	לא	**8)**	כן	**9)**	כן	**10)**	לא
11)	לא	**12)**	כן	**13)**	כן	**14)**	כן	**15)**	כן
16)	כן	**17)**	לא	**18)**	כן	**19)**	כן	**20)**	לא
21)	לא	**22)**	כן	**23)**	כן	**24)**	כן	**25)**	כן
26)	כן	**27)**	לא	**28)**	כן	**29)**	לא	**30)**	כן

31) א. כן ב. לא

32) א. $u=(1,0,0,0,0)$ ב. $B=\{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5) \mid -b_1+b_2+2b_3\neq 0\}$
ג. לא.

33) א. $k=0$ ב. $W=span\{2x-3x^2+x^3, 6x-7x^2+x^4\}$

צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

שאלות

בשאלות **1-7** נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1=(4,1,1,5),\quad u_2=(0,11,-5,3),\quad u_3=(2,-5,3,1),\quad u_4=(1,3,-1,2)$$

1) א. האם u_1 הוא צירוף ליניארי של u_4?
ב. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלויה ליניארית?

2) א. האם u_3 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלויה ליניארית?
במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הווקטורים האחרים.

3) א. האם u_4 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלויה ליניארית?
במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הווקטורים האחרים.

4) נתון $v=(4,12,k,-2k)$.
א. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהווקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. מה צריך להיות ערכו של k, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

5) נתון $v=(a,b,c,d)$.
א. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהווקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2?
ב. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?
ג. מה התנאים על a,b,c,d, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

6) הביעו את הווקטור $v=(10,8,0,14)$ כצירוף ליניארי של u_1, u_2 ו- u_3.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

7) הביעו את הווקטור $v=(7,10,-2,11)$ כצירוף ליניארי של u_1, u_2, u_3 ו- u_4.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

8) נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 11\\ -5 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

א. בדקו האם המטריצות תלויות ליניארית מעל $M_2[R]$.
ב. במידה והמטריצות תלויות, רשמו כל אחת מהמטריצות כצירוף ליניארי של יתר המטריצות.
ג. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B,C\}$?

9) נתונים הפולינומים הבאים:

$$p_1(x)=4+x+x^2+5x^3\ ,\ p_2(x)=11x-5x^2+3x^3\ ,$$
$$p_3(x)=2-5x+3x^2+x^3\ ,\ P_4(x)=1+3x-x^2+2x^3\ .$$

א. בדקו האם הפולינומים תלויים ליניארית מעל $P_3[R]$.
ב. במידה והפולינומים תלויים ליניארית, רשמו כל פולינום כצירוף ליניארי של שאר הפולינומים.
ג. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1,p_4\}$?

10) עבור איזה ערכים של a,b,c, הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:

$$\{(c,2,4),(2.4,a,2),(c,b,6),(b,2,a)\}$$

בשאלות **11-13** נתון כי קבוצת הווקטורים $\{u,v,w\}$ בלתי תלויה ליניארית ב- $V[F]$.
בדקו האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית,
ובמידה וכן רשמו כל וקטור כצירוף של הווקטורים האחרים:

11) $\{u-v,u-w,u+v-2w\}$

12) $\{u+2v+3w,4u+5v+6w,7u+8v+9w\}$

13) $\{u+v,v+w,w\}$

בשאלות **14-15** בדקו האם הווקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$,
תלויים ליניארית ב- C^3 :

14) מעל $\mathbb{C}$.

15) מעל $\mathbb{R}$.

16) נתבונן ב- $V=R$ כמרחב וקטורי מעל השדה Q.
הוכיחו כי הקבוצה $\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$ היא בת"ל ב- R, כשהוא מרחב וקטורי מעל Q.

17) תהי $A_{m\times n}$ מטריצה, שעמודותיה $A_1,A_2,\ldots A_n$.
הוכיחו את הטענה הבאה:
למערכת $Ax=b$ יש פתרון אם ורק אם $b\in span\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$.

18) להלן 3 תת-קבוצות של R^4 :

$U=span\{(1,2,2,1),(1,1,-1,-1),(0,0,1,1)\}$

$W=span\{(1,1,0,0),(1,2,1,0),(1,3,3,1)\}$

$V=span\{(2,3,1,0),(1,2,1,0),(1,4,3,1)\}$

א. האם $U=W$?

ב. האם $U=V$?

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.

2) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 2u_3 + u_2,\ \ u_2 = u_1 - 2u_3$.

3) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 4u_4 - u_2,\ \ u_2 = 4u_4 - u_1$.

4) א+ב+ג. $k = -4$

5) $a = 5t + 3s,\ b = 4t - 13s,\ c = 7s,\ d = 7t$

6) $v = 2u_1 + u_2 + u_3$, אינסוף.

7) $v = \frac{7}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2$, אינסוף.

8) א. המטריצות תלויות. ג. כן. $A = B + 2C$
ב. $A = B + 2C,\quad B = A - 2C,\quad C = 0.5A - 0.5B,\quad D = 0.25A + 0.25B$

9) א. הפולינומים תלויים. ג. $p_2 = 4p_4 - p_1$
ב. $p_1 = p_2 + 2p_3,\ \ p_2 = p_1 - 2p_3,\ \ p_3 = 0.5p_1 - 0.5p_2,\ \ p_4 = 0.25p_1 + 0.25p_2$

10) לכל ערך של a, b, c.

11) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x = 2y - z,\ \ y = 0.5x + 0.5z,\ \ z = 2y - x$.

12) הווקטורים תלויים ליניארית, ומתקיים: $x = 2y - z,\ \ y = 0.5x + 0.5z,\ \ z = 2y - x$.

13) בלתי תלויים ליניארית.

14) תלויים.

15) בלתי תלויים ליניארית.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) א. כן. ב. לא.

בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

שאלות

1) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

א. $\{(1,0,1),\ (0,0,1)\}$

ב. $\{(1,1,2),\ (1,2,3),\ (3,3,4),\ (2,2,1)\}$

ג. $\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$

2) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2x2}[R]$:

א. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix}\right\}$

ב. $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&16\\7&8\end{pmatrix}\right\}$

ג. $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

3) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

א. $\{1+x,\ x^2+2x+3\}$

ב. $\{1+x,\ x^2+2x+3, 2x+4x^2, x-x^2\}$

ג. $\{1+2x+3x^2,\ 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2\}$

4) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T=\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9), (2,3,4)\}$.

א. האם T בסיס ל- R^3 ?

ב. מצאו קבוצה T', שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים, בלתי תלויה ליניארית ב- T .

ג. השלימו את T' לבסיס של R^3 .

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

5) להלן 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

.1 $\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases}$ .2 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases}$ .3 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.
נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.
נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.
מצאו בסיס וממד ל- W, U ו- V.

6) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

7) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

8) נתון $U=\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

9) נתון $U=\{A\in M_{2x2}[R] \mid A=A^T\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

10) נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \;\middle|\; A\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

11) נתון $U=\left\{p(x)\in P_3[R] \;\middle|\; p(1)=0\right\}$.
מצאו בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד לתת-מרחב

12) להלן שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = span\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = span\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- U.

ב. מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- V.

13) להלן תת-מרחב של המרחב $M_{2x2}[R]$:

$$U = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U.

14) להלן תת-מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = span\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצאו בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

בשאלות **15-16** מצאו בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה,
וציינו את דרגת המטריצה (rank) :

15)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

16)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

תשובות סופיות

1) א. לא. ב. לא. ג. לא.

2) א. לא. ב. לא. ג. כן.

3) א. לא. ב. לא. ג. כן.

4) א. לא. ב. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ ג. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6),(0,0,1)\}$

5) א. W - בסיס: $\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$, ממד: 2.

U - בסיס: $\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$, ממד: 2.

V - בסיס: $\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

6) בסיס: $\{(0,1,0,1),(1,0,1,0)\}$, ממד: 2.

7) בסיס: $\{(-1,1,0,1),(2,-1,1,0)\}$, ממד: 2.

8) בסיס: $\{(1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

9) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3.

10) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 0.

11) בסיס: $\{p_1(x)=-1+x^3,\ \ p_2(x)=-1+x^2,\ \ p_3(x)=-1+x\}$, ממד: 3.

12) א. בסיס: $\{(1,1,-1,2),(0,-4,10,-2)\}$, ממד: 2.

ב. בסיס: $\{(1,-1,1,1),(0,-1,1,-2),(0,0,-2,5)\}$, ממד: 3.

13) בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-3\\3&-7\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2.

14) בסיס: $\{1+x-x^2+2x^3,-3x+3x^2-7x^3\}$, ממד: 2.

15) מרחב שורה: בסיס: $\{(4,1,1,5),(0,11,-5,3)\}$, ממד: 2.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2, דרגה: 2.

16) מרחב שורה: בסיס: $\{(1,2,1,3,5),(0,11,-5,-4),(0,0,0,1,1)\}$, ממד: 3.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-16\\37\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3, דרגה: 3.

וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\quad B_2=\{\ (1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2.
סמנו מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1.
סמנו מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשרו את הטענות הבאות:

1. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$
2. $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$
3. $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

2) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$B_1=\{1+x,x,\ x+x^2\}\ ,\quad B_2=\{\ 1+x^2,x+x^2,\ x^2\ \}$.

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2.
סמנו מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

3) נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_B$.

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E.
סמנו וקטור זה ב- $[v]_E$.

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E.
סמנו מטריצה זו ב- $[M]_B^E$.

4) יהי V מרחב וקטורי ויהי B בסיס של V.
הוכיחו כי הווקטורים $\{u_1,u_2,...,u_m\}$ בת"ל,
אם ורק אם וקטורי הקואורדינטות שלהם,
לפי הבסיס B, $\{[u_1],[u_2],...,[u_m]\}$, הם בת"ל.
הסבירו כיצד השתמשנו בטענה זו רבות במהלך הקורס.

תשובות סופיות

1) א. $(x,y-x-z,z)$ ב. $(x,y,z-x-y)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

ד. $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$ ה. הוכחה.

2) א. $(a,b-a-c,c)$ ב. $(a,b,c-a-b)$ ג. $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

3) א. $(x,y-x,z-y+x,t-z+y-x)$ ב. (x,y,z,t) ג. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$

4) שאלת הוכחה.